Nom : .....

Prénom : .....

Numéro Parcoursup : .....

ConcoursAvenir

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1h30
Coefficient : 6

Consignes spécifiques :

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti. La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale. Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières répondues seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué.
Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement. Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème valable pour toutes les questions :

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.
Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard :

- **Chaque réponse exacte est gratifiée d'un point.**
- **Chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point.**
- **Une question non traitée n'apporte et ne retire aucun point.**

Calculs numériques et suites

Question 1.
On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{n^3+1}{2n^3+5}.$$

On peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
d. (u_n) est bornée par 1 mais sans limite

Question 2.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

On peut alors affirmer que :

a. (u_n) converge vers 6
b. (u_n) est bornée mais n'a pas de limite
c. (u_n) diverge vers $+\infty$
d. (u_n) est arithmétique de raison 3

Question 3.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$.
On peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
b. (u_n) diverge vers $+\infty$
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
d. (u_n) est bornée mais sans limite

Question 4.
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n^2+4n} - n$.
On peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b.** (u_n) n'a pas de limite **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Question 5.
On considère la suite (s_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

On peut alors affirmer que :

a. $s_n = \ln(n+1)$ **b.** $s_n = \dfrac{1}{n+1}$ **c.** $s_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ **d.** $s_n = \dfrac{n}{n+1}$

Question 6.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

On peut alors affirmer que :

a. (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$
b. (u_n) est décroissante et converge vers 1
c. (u_n) est décroissante et converge vers 0
d. (u_n) est croissante et converge vers 1

Question 7.
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+2)\,k}{(k+1)^2}\right).$$

On peut alors affirmer que :

a. $s_n = \ln\left(\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$ **b.** $s_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ **c.** $s_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{2(n+1)}\right)$ **d.** $s_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)$

Question 8.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}.$$

On peut alors affirmer que :

a. (u_n) converge vers $\sqrt{2}$
b. (u_n) converge vers 0
c. (u_n) diverge vers $+\infty$
d. (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Question 9.
On considère (u_n) définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n$.
On cherche le plus petit entier n tel que $u_n < 1$.
Quel programme Python renvoie le bon n ?

a.

```
def seuil():
    n, u = 0, 100
    while u >= 1:
        n = n + 1
        u = 0.8 * u
    return n
```

b.

```
def seuil():
    n, u = 0, 100
    while u >= 1:
        u = 0.8 * u
        n = n + 1
    return n - 1
```

c.

```
def seuil():
    n, u = 0, 100
    while u < 1:
        n = n + 1
        u = u * 0.8
    return n
```

d.

```
def seuil():
    n, u = 1, 100
    while u >= 1:
        u = 0.8 * u
        n = n + 1
    return n
```

Question 10.
On considère le programme Python suivant :

```
def mystere(N):
    u = 2
    for k in range(1, N+1):
        u = 3*u - 1
    return u
```

La valeur renvoyée par `mystere(3)` est :

a. 20 **b.** 41 **c.** 17 **d.** 53

Question 11.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

On peut alors affirmer que :

a. (u_n) est croissante et majorée par 2
b. (u_n) est décroissante et minorée par 0
c. (u_n) n'est pas bornée
d. $u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Question 12.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

On peut alors affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a. $u_n = 2n + 1$ **b.** $u_n = (n+1)^2$ **c.** $u_n = n^2 + 1$ **d.** $u_n = (n+1)(n+2)$

Études de fonctions

Dans toute cette section, on considère les courbes représentatives de fonctions dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Question 13.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est exacte ?

a. f est décroissante sur $\mathbb{R}$
b. $y = 1$ est une asymptote horizontale au graphe de f
c. La tangente au point d'abscisse 1 est horizontale
d. $f'(1) = 1$

Question 14.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.
On peut alors affirmer que :

a. f est croissante sur $\mathbb{R}$
b. f admet un unique maximum en $x = 1$
c. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
d. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Question 15.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.
Combien de points du graphe de f ont une tangente horizontale ?

a. 1 **b.** 0 **c.** 3 **d.** 2

Question 16.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}.$$

Quelle(s) asymptote(s) verticale(s) et/ou horizontale(s) la courbe représentative C_f admet-elle ?

a. Verticale $x = -1$ et horizontale $y = 1$
b. Verticale $x = 1$ et horizontale $y = 1$
c. Horizontale $y = 2$ uniquement
d. Verticale $x = 1$ et horizontale $y = 2$

Question 17.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.
On peut alors affirmer que :

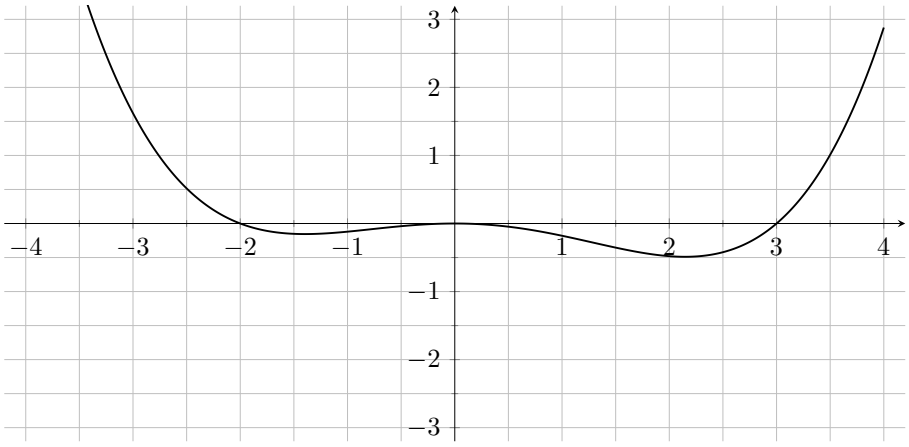
a. f est décroissante sur $\mathbb{R}$
b. f admet un maximum en $x = 0$
c. f admet un minimum en $x = 0$
d. f est croissante sur $\mathbb{R}$

Question 18.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2$.

On peut alors affirmer que :

a. f est convexe sur $\mathbb{R}$
b. f est convexe sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty\right[$ et concave sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$
c. f est concave sur $\mathbb{R}$
d. f est convexe sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ et concave ailleurs

Question 19.
Soit une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de sa fonction dérivée seconde f''.



Les abscisses des points d'inflexion du graphe de f sont :

a. aucun point **b.** 0 uniquement **c.** -2 et 3 uniquement **d.** -2; 0; 3

Question 20.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right).$$

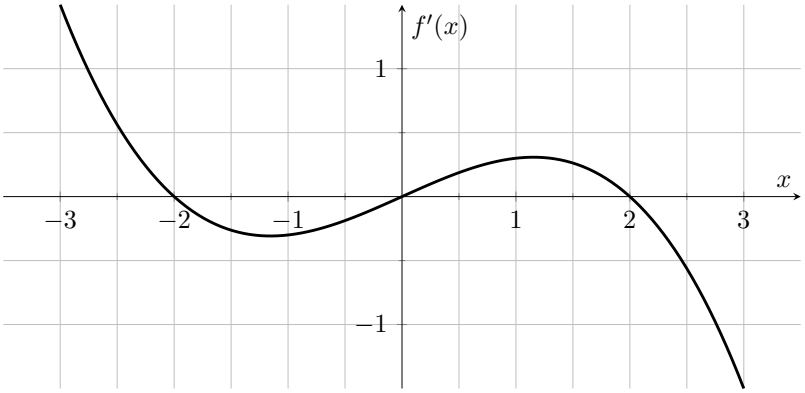
On peut alors affirmer que :

a. f est concave sur $\left]\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$ et convexe ailleurs
b. f est concave sur $\mathbb{R}$
c. f est convexe sur $\left]\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$ et concave ailleurs
d. f est convexe sur $\mathbb{R}$

Question 21.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$. On cherche l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.
On peut alors affirmer que cette tangente a pour équation :

a. $y = x + 1$ **b.** $y = x - 2$ **c.** $y = x + 2$ **d.** $y = 3x + 2$

Question 22.
On donne ci-dessous la courbe représentative de f', dérivée d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



On peut alors affirmer que :

- **a.** f admet deux maxima locaux en $x = -2$ et $x = 2$, et un minimum local en $x = 0$
- **b.** f admet deux minima locaux en $x = -2$ et $x = 2$, et un maximum local en $x = 0$
- **c.** f est décroissante sur $]-\infty; -2[$
- **d.** f est décroissante sur $]0; 2[$

Question 23.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(1 + x^2) - \frac{x^2}{2}.$$

On peut alors affirmer que :

- **a.** l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$
- **b.** l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$
- **c.** l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$
- **d.** l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$

Question 24.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

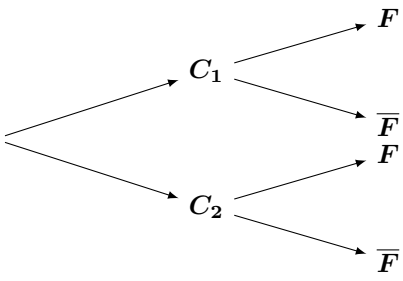
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0, \\ a\,x + \sin x, & \text{si } x > 0, \text{ où } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour que f soit dérivable en 0, il faut et il suffit que :

a. $a = 2$ **b.** $a = 0$ **c.** $a = 1$ **d.** $a = -1$

Probabilités et dénombrement

Question 25.
On choisit au hasard une pièce parmi C_1 et C_2 avec $P(C_1) = 0{,}4$ et $P(C_2) = 0{,}6$. On suppose $P_{C_1}(F) = 0{,}6$ et $P_{C_2}(F) = 0{,}2$, où F désigne l'évènement « obtenir Face » lors d'un unique lancer. On donne ci-dessous un arbre de probabilités.



On peut alors affirmer que $P_F(C_1)$ vaut :

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{2}{3}$ **d.** $\frac{3}{5}$

Question 26.
On forme des codes de longueur 3 avec des lettres distinctes choisies dans $\{A, B, C, D, E\}$.
Le nombre de codes différents possibles est :

a. 20 **b.** 10 **c.** 125 **d.** 60

Question 27.
On lance simultanément deux dés équilibrés. La probabilité que la somme vaille 7 est :

a. $\frac{1}{12}$ **b.** $\frac{1}{9}$ **c.** $\frac{1}{6}$ **d.** $\frac{5}{36}$

Pour les questions 28 à 30, on considère un jeu de 10 cartes distinctes, numérotées de 1 à 10.
On effectue des tirages successifs sans remise.

Question 28.
On tire successivement deux cartes sans remise et on note S la somme des numéros obtenus.
On peut alors affirmer que $P($« S est paire »$)$ vaut :

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{4}{9}$ **c.** $\frac{5}{9}$ **d.** $\frac{1}{3}$

Question 29.
On tire successivement deux cartes sans remise. Soit M le maximum des deux numéros tirés.
On peut alors affirmer que $P(M = 10)$ vaut :

a. $\frac{1}{10}$ **b.** $\frac{2}{9}$ **c.** $\frac{1}{5}$ **d.** $\frac{11}{90}$

Question 30.
Dans ce contexte, on tire successivement trois cartes sans remise.
On s'intéresse à l'événement A : « les trois numéros obtenus sont dans l'ordre croissant strict selon l'ordre de tirage ».
On peut alors affirmer que $P(A)$ vaut :

a. $\frac{1}{10}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{3}{10}$ **d.** $\frac{1}{6}$

Question 31.
Huit personnes distinctes, dont deux personnes particulières A et B, s'alignent aléatoirement.
On exige que A et B ne soient pas voisins.
Le nombre d'alignements possibles est :

a. $8! - 2 \times 8!$ **b.** $8! - 7!$ **c.** $7!$ **d.** $8! - 2 \times 7!$

Question 32.
On tire au hasard 5 cartes sans remise dans un jeu de 32 cartes classique (♣, ♦, ♥, ♠).
On rappelle que dans un tel jeu il y a exactement 1 As par famille, soit 4 As en tout.
La probabilité d'obtenir exactement 2 As est exprimée par :

a. $\frac{\binom{4}{1}\binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}$ **b.** $\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{32^5}$ **c.** $\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}$ **d.** $\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{2}}{\binom{32}{5}}$

Question 33.
On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes, sans remise. On appelle *rang* la *valeur* d'une carte, indépendamment de sa famille (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As).
Il y a donc 8 rangs et 4 familles (♣, ♦, ♥, ♠).
On veut que les 5 cartes tirées aient des rangs tous distincts.
La probabilité recherchée est donnée par :

a. $\frac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}}$ **b.** $\frac{\binom{8}{5}4^5}{32^5}$ **c.** $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 4^5}{32^5}$ **d.** $\frac{\binom{8}{5}4^5}{\binom{32}{5}}$

Question 34.
On considère deux évènements H et S avec $P(H) = 0{,}5$, $P_H(S) = 0{,}2$ et $P_{\overline{H}}(S) = 0{,}1$.
On peut alors affirmer que $P_S(H)$ vaut :

a. $\frac{3}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{2}{3}$ **d.** $\frac{1}{2}$

Question 35.
On considère la fonction Python suivante :

```
def C(n, k):
    from math import factorial
    return factorial(n)//(factorial(k)*factorial(n-k))
```

La valeur renvoyée par `C(10,3)` est :

a. 210 **b.** 45 **c.** 720 **d.** 120

Question 36.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à ordonner les trois lettres $\{A, B, C\}$. Chaque ordre possible est choisi avec la même probabilité. On note E : « A précède B » et F : « B précède C », c'est-à-dire que A (resp. B) apparaît à une position antérieure à B (resp. C) dans l'ordre de gauche à droite.

On peut alors affirmer que :

a. E et F ne sont pas indépendants et $P(E \cap F) = \dfrac{1}{4}$
b. E et F ne sont pas indépendants et $P(E \cap F) = \dfrac{1}{6}$
c. E et F sont indépendants et $P(E \cap F) = \dfrac{1}{6}$
d. E et F sont indépendants et $P(E \cap F) = \dfrac{1}{4}$

Géométrie

Dans toute cette section, sauf mention explicite du contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ***et l'espace d'un repère orthonormé*** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$**.**

Question 37.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x - y + z - 3 = 0$.
Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur normal à $\mathscr{P}$?

a. $(1; -2; 1)$ **b.** $(4; -2; 2)$ **c.** $(2; 1; -1)$ **d.** $(2; 1; 1)$

Question 38.
On considère les plans $\Pi_1 : x + y + z = 3$ et $\Pi_2 : 2x - y + z = 1$. On note $\Delta = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Une représentation paramétrique de Δ est :

a. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **c.** $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Question 39.
On considère les points $A(1;0;2)$ et $B(3;-1;5)$. On note d la droite passant par A et B.

Une représentation paramétrique de d est :

a. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **c.** $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -t \\ z = 2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Question 40.
Soient d_1 et d_2 deux droites de l'espace données par :

$$d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 1-s \\ y = 1 \\ z = 1+s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

On peut alors affirmer que :

a. elles sont parallèles
b. elles sont non coplanaires
c. elles sont sécantes au point $(0;1;2)$
d. elles sont sécantes au point $(1;1;2)$

Pour les questions 41 à 43, on considère dans un repère orthonormé :

$$\mathscr{P} : x - y + 2z - 3 = 0, \quad d : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad M(2;0;2).$$

Question 41.
Dans ce contexte, soit I le point d'intersection de d et $\mathscr{P}$.
On peut alors affirmer que :

a. $I(1;1;0)$ **b.** $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};1\right)$ **c.** $I\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ **d.** $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Question 42.
Dans ce contexte, la distance entre le point M et le plan $\mathscr{P}$ vaut :

a. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **b.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$ **c.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **d.** $\sqrt{3}$

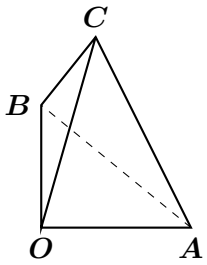
Question 43.
Dans ce même contexte, la distance entre le point M et la droite d vaut :

a. 0 **b.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$ **c.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **d.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Question 44.
On considère le plan $\mathscr{P} : x + y + z = 0$. Soit H le projeté orthogonal de $A(1;2;3)$ sur $\mathscr{P}$.
On peut alors affirmer que :

a. $H(1;0;-1)$ **b.** $H(-1;0;1)$ **c.** $H(0;0;0)$ **d.** $H(1;2;3)$

Question 45.
Soit le tétraèdre $OABC$ avec $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ et $C(0;0;6)$.



On peut alors affirmer que le volume $V(OABC)$, en unités de volume, vaut :

a. 6 **b.** 9 **c.** 12 **d.** 18

Question 46.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(1;2;3)$ et admettant $\vec{u}(1;0;1)$ et $\vec{v}(0;1;1)$ pour vecteurs directeurs. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donnée par :

a. $x-y+z=0$ **b.** $x+y+z=6$ **c.** $x+y-z=0$ **d.** $x+y-z=6$

Question 47.
Dans l'espace, on considère $\vec{u}(1;2;0)$ et $\vec{v}(2;1;0)$.
La valeur de $\cos(\vec{u},\vec{v})$ est :

a. $\dfrac{1}{5}$ **b.** $\dfrac{3}{5}$ **c.** $\dfrac{2}{5}$ **d.** $\dfrac{4}{5}$

Question 48.
Soit la droite d de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

et le point $M(2;2;0)$. On appelle H le projeté orthogonal de M sur d.
On peut alors affirmer que :

a. $H\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ **b.** $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ **c.** $H(1;1;1)$ **d.** $H(0;1;1)$

Équations différentielles, primitives et calcul intégral

Question 49.
On considère la solution y de l'équation différentielle $y'-3y=6$ telle que $y(0)=0$.
On peut alors affirmer que :

a. $y(x)=2-2\,\mathrm{e}^{3x}$ **b.** $y(x)=2\,\mathrm{e}^{3x}-2$ **c.** $y(x)=-2\,\mathrm{e}^{-3x}+2$ **d.** $y(x)=2-\mathrm{e}^{3x}$

Question 50.
On considère l'équation différentielle $y' = 2y$.
Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une solution de cette équation ?

a. $x \mapsto \mathrm{e}^{2x-2}$ **b.** $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{x}$ **c.** $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 1$ **d.** $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$

Question 51.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ vaut :

a. 0 **b.** 1 **c.** $\ln 2$ **d.** $\dfrac{1}{2}$

Question 52.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.
La valeur moyenne de f sur $[0;\pi]$ vaut :

a. $\dfrac{1}{\pi}$ **b.** $\dfrac{2}{\pi}$ **c.** 0 **d.** 1

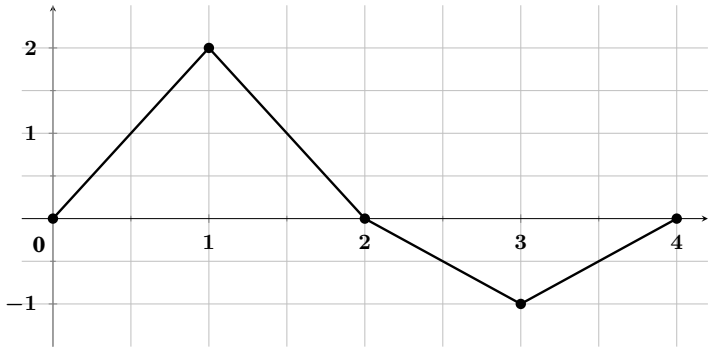
Question 53.
Sur $[\,1;\mathrm{e}\,]$, on considère les courbes d'équations $y = \ln x$ et $y = x - 1$.
L'aire (en unités d'aire) de la région comprise entre ces deux courbes vaut :

a. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} + \dfrac{1}{2}$ **c.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$ **d.** $\mathrm{e} - 1$

Question 54.
Sur $\mathbb{R}$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{4x}{2 + x^2}$ est :

a. $x \mapsto 2\ln(2 + x^2)$ **b.** $x \mapsto \ln(2 + x^2)$ **c.** $x \mapsto \dfrac{4x}{2 + x^2}$ **d.** $x \mapsto \ln(2 - x^2)$

Question 55.
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction continue f sur $[\,0;4\,]$.



On peut alors affirmer que $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ vaut :

a. $\dfrac{1}{2}$ **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

Question 56.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

On peut alors affirmer que :

a. $I_1 = \mathrm{e} - 1$ **b.** $I_2 = 2 - \mathrm{e}$ **c.** $I_2 = 1$ **d.** $I_2 = \mathrm{e} - 2$

Question 57.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x$ vaut :

a. $\ln 3$ **b.** $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ **c.** $\ln 2$ **d.** $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Question 58.

On considère l'équation différentielle $y' = y - 1$.

Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

a. Toutes les solutions sont décroissantes

b. Toutes les solutions sont croissantes

c. La courbe de toute solution admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$

d. Toutes les solutions sont positives

Question 59.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$ vaut :

a. $1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$ **b.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$ **c.** $1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$ **d.** $\frac{2}{\mathrm{e}}$

Question 60.

On considère la solution y de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ (où a et b sont des réels), vérifiant

$$y(0) = 0 \quad \textbf{et} \quad y(1) = 1.$$

Parmi les couples $(a ; b)$ proposés ci-dessous, lequel convient ?

a. $(\ln 2 \, ; \, \ln 2)$ **b.** $(1 \, ; \, 1)$ **c.** $\left(1 \, ; \, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ **d.** $(\ln 2 \, ; \, 1)$

••• FIN •••

Ce sujet est la propriété intellectuelle exclusive du Concours Avenir. Il ne doit en aucun cas être emporté par les candidats à la fin de l'épreuve. Il doit être rendu à l'équipe surveillante en même temps que sa grille réponse associée.