NOM : ....

PRÉNOM : ....

NUMÉRO PARCOURSUP : ....

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 1h30
Coefficient 6

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet "difficile", ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).
Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points,** tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point. Une question non traitée n'apporte ni ne retire aucun point.**

GÉOMÉTRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE

Question 1.
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. On définit les points A, B et C comme étant les points de coordonnées respectives $(8\,;-2\,;4)$, $(8\,;-2\,;14)$ et $(0\,;-2\,;-2)$. On a alors :

a. $AB > AC$
b. $AB = AC$
c. $AB < AC$
d. on ne peut pas comparer AB et AC

Question 2.
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-3y+6z-2=0$ et A le point de coordonnées $(-1\,;-1\,;-1)$. La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 7

Question 3.
Parmi les égalités suivantes, laquelle est vraie quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

a. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$
b. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$
c. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
d. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Question 4.
On suppose le plan muni d'un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. $\mathscr{C}$ désigne le cercle de centre O et de rayon 1.
Soit $ABCD$ un carré dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}$ et dont chaque côté est parallèle à l'un des axes du repère.
Quelle est la longueur d'un côté de ce carré ?

a. 1 **b.** $\sqrt{2}$ **c.** $\sqrt{3}$ **d.** $\frac{2}{3}$

Question 5.
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x+y-z-3=0$, A le point de coordonnées $(-1\,;1\,;-4)$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = -4-t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

On admet que $A \in \mathscr{P}$ et que $\mathscr{D}$ est la droite perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ passant par A.
Soit B le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(3\,;3\,;-6)$. Si C est un point du cercle inclus dans $\mathscr{P}$ de centre A et de rayon 5, alors $BC =$

a. 6 **b.** 7 **c.** 36 **d.** 49

CALCUL NUMÉRIQUE, SUITES NUMÉRIQUES

Question 6.
Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4+u_5+u_6=18$.
On peut alors affirmer que $u_5 =$

a. 5 **b.** 6 **c.** 7 **d.** 8

Question 7.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n strictement positif par : $u_n = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$.
Cette suite est :

a. minorée mais non majorée
b. non minorée et non majorée
c. non minorée mais majorée
d. minorée et majorée

Question 8.
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme strictement négatif et de raison $r < 0$. La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est alors :

a. la suite nulle
b. non arithmétique
c. arithmétique de raison r
d. arithmétique de raison $-r$

Question 9.
Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors on peut affirmer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3u_n$ est :

a. géométrique de raison q
b. géométrique de raison -3
c. géométrique de raison $-3q$
d. géométrique de raison $3q$

Question 10.
Soit n un entier naturel non nul. La somme $1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ est égale à :

a. $\frac{1 - e^n}{1 - e}$ **b.** $\frac{e - e^{n+1}}{e - 1}$ **c.** $\frac{1 - e^{-n}}{1 - e}$ **d.** $\frac{e - e^{-n}}{e - 1}$

Question 11.
A cette heure, Bruno a déjà parcouru les deux tiers du trajet à effectuer pour aller travailler.
La portion du trajet restant à faire représente quelle fraction de celle déjà effectuée ?

a. $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{2}{3}$ **d.** $\frac{1}{4}$

Attention ! Les questions 12 à 14 nécessitent la connaissance préalable de la définition suivante :

Définition : *Si a est un nombre réel, on appelle "racine cubique de a", et on note $\sqrt[3]{a}$, l'unique réel qui, élevé au cube, est égal à a.*

Par exemple, $\sqrt[3]{27} = 3$ *car* $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{-8} = -2$ *car* $(-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.

Question 12.
Si a désigne un nombre réel, alors on a :

a. $\sqrt[3]{e^a} = e^{3a}$ **b.** $\sqrt[3]{e^a} = e^{\frac{a}{3}}$ **c.** $\sqrt[3]{e^a} = e^{\sqrt[3]{a}}$ **d.** $\sqrt[3]{e^a} = \frac{e^a}{3}$

Question 13.
Soit a un nombre réel strictement positif et b la racine cubique de a : $b = \sqrt[3]{a}$.
Alors on a :

a. $\ln(a) = \frac{1}{3}\ln(b)$ **b.** $\ln(a) = 3\ln(b)$ **c.** $e^a = e^{3b}$ **d.** $e^b = e^{3a}$

Question 14.
Combien existe-t-il de nombres réels égaux à leurs propres racines cubiques ?

a. 0 **b.** 1 **c.** 3 **d.** une infinité

Question 15.
Quelle est la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite (u_n) où u_n est défini pour tout entier naturel n par : $u_n = \left(\frac{e}{3}\right)^n$?

a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** 1 **d.** e

FONCTIONS

Question 16.
Soit f une fonction définie, deux fois dérivable, et convexe sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel a, on a :

a. $f(x) > f'(a) \times (x-a) + f(a)$ pour tout réel x

b. $f(x) < f'(a) \times (x-a) + f(a)$ pour tout réel x

c. $f(x) \geqslant f'(a) \times (x-a) + f(a)$ pour tout réel x

d. $f(x) \leqslant f'(a) \times (x-a) + f(a)$ pour tout réel x

Question 17.
Un point fixe d'une fonction g est un nombre réel x tel que $g(x) = x$.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 4$ et $f(4) = 2$.
On peut alors affirmer que les réels 2 et 4 sont des points fixes de la fonction :

a. $f \circ f$ **b.** $f \times f$ **c.** f **d.** $f + 2$

Question 18.
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

a. Si $f'(a) = 0$, alors f possède un extremum local atteint en $x = a$

b. Si $f'(a) \neq 0$, alors f possède un extremum local atteint en $x = a$

c. Si f possède un extremum local atteint en $x = a$, alors $f'(a) = 0$

d. Si f possède un extremum local atteint en $x = a$, alors $f'(a) \neq 0$

Question 19.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.
Soient a et b deux nombres réels distincts, A et B les points de $\mathscr{P}$ d'abscisses respectives a et b :

$$A\left(a\,;a^2\right) \qquad \text{et} \qquad B\left(b\,;b^2\right)$$

La pente de la sécante (AB) est égale à :

a. $a - b$ **b.** $b - a$ **c.** $a + b$ **d.** $b^2 - a^2$

Question 20.
f est une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et telle que pour tout $x < 0$, on a :

$$\ln\left(\mathrm{e}^{f(x)} + 1\right) = f(x) - x$$

On peut alors affirmer que pour tout réel x appartenant à I, on a : $f(x) =$

a. $-\ln\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$ **b.** $-\ln\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)$ **c.** $-\ln\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)$ **d.** $-\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$

Question 21.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a\mathrm{e}^{bx}$ où a et b sont deux réels.
Sachant que la tangente à la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé en $x = 0$ admet $y = 2x - 1$ pour équation réduite, on peut affirmer que :

a. $a < 0$ et $b < 0$ **b.** $a < 0$ et $b > 0$ **c.** $a > 0$ et $b < 0$ **d.** $a > 0$ et $b > 0$

Question 22.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = ax$ où a est un nombre réel.
La courbe $\mathscr{C}_f$ possède une tangente parallèle à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, a appartient à l'intervalle :

a. $[-1\,;1[$ **b.** $]-\infty\,;-1]$ **c.** $]1\,;+\infty[$ **d.** $]-1\,;1[$

Question 23.
Soient a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < b$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note Γ la courbe représentative de la fonction ln, et A et B les points de Γ d'abscisses respectives a et b :

$$A\,(a\,;\ln(a)) \qquad \text{et} \qquad B\,(b\,;\ln(b))$$

L'abscisse du point de Γ en lequel la tangente à Γ est parallèle à la droite (AB) est égale à :

a. $\dfrac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$ **b.** $\dfrac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{a-b}$ **c.** $\dfrac{a-b}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ **d.** $\dfrac{b-a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

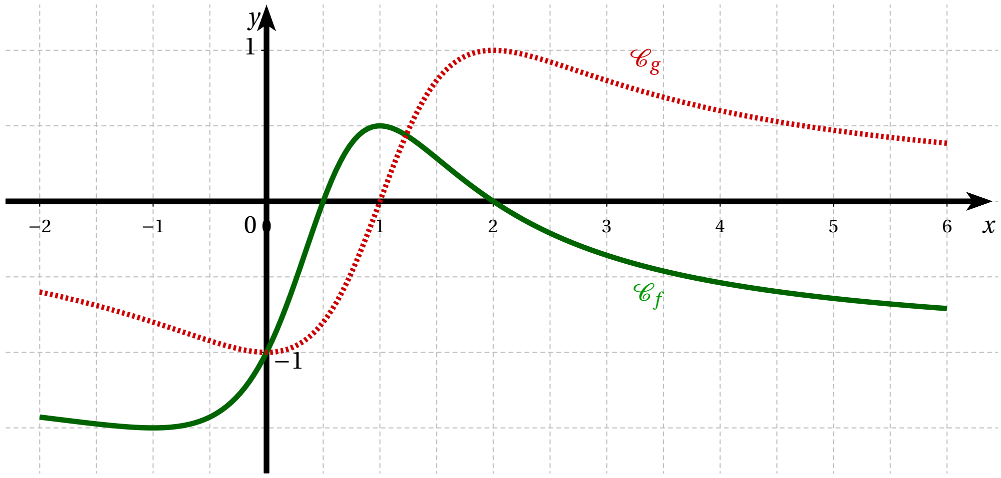
Question 24.
Soient a et b deux nombres réels distincts et strictement positifs.
Quelle est l'unique solution de l'équation d'inconnue x suivante : $a\mathrm{e}^{bx} = b\mathrm{e}^{ax}$?

a. $\dfrac{a}{b}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$ **b.** $\dfrac{a}{b}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$ **c.** $\dfrac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}$ **d.** $\dfrac{\ln(a)-\ln(b)}{b-a}$

Question 25.
Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 coupe l'axe $\left(O\,;\vec{\imath}\right)$ au point d'abscisse :

a. 0 **b.** $\ln(2)$ **c.** $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ **d.** $\dfrac{1}{2}$

Attention ! Pour les questions 26 à 29, f et g désignent deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]-2;\ 6[$.
Une représentation graphique est donnée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de f est en trait plein, celle de g est en pointillés.



Question 26.
On peut affirmer que :

a. $(f\circ g)(2) < (g\circ f)(2)$
b. $(f\circ g)(2) > (g\circ f)(2)$
c. $(f\circ g)(2) = (g\circ f)(2)$
d. il est impossible de comparer $(f\circ g)(2)$ et $(g\circ f)(2)$

Question 27.
Si h désigne la fonction $g\circ f$, alors :

a. $h'(1) = 0$ **b.** $h'(1) = 1$ **c.** $h'(1) = -1$ **d.** $h'(1) = 2021$

Question 28.
On peut affirmer que :

a. les antécédents de 0 par la fonction $g \circ f$ sont $\frac{1}{2}$ et 2

b. 1 est l'unique antécédent de 0 par la fonction $g \circ f$

c. les antécédents de 0 par la fonction $g \circ f$ sont $\frac{1}{2}$, 1 et 2

d. 0 ne possède pas d'antécédent par la fonction $g \circ f$

Question 29.
Sur l'intervalle $]2;6[$, la fonction $g \circ f$:

a. est strictement décroissante

b. est strictement croissante

c. est constante

d. change de sens de variation

Question 30.
Soit u une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Sachant que u est convexe sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que la fonction e^u est :

a. concave sur $\mathbb{R}$ **b.** convexe sur $\mathbb{R}$ **c.** convexe puis concave **d.** concave puis convexe

PRIMITIVES

Question 31.
Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont "liées" par la propriété suivante :

Si une fonction h est une primitive de f, alors la fonction k définie par $k(x) = h(x) + 2x$ est une primitive de g.

On peut alors affirmer que :

a. $f' = g'$

b. $f' = g' - 2$

c. $f' = g' + 2$

d. Les précédentes propositions sont fausses

Question 32.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$ et F sa primitive sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en $x = \mathrm{e}$.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de F dans le plan muni d'un repère orthonormé au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$ est donnée par :

a. $y = \dfrac{x+\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$ **b.** $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}+1}$ **c.** $y = \dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$ **d.** $y = \dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

Question 33.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - x}$. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors F est :

a. concave sur $\mathbb{R}$

b. concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$

c. convexe sur $]-\infty\,;0[$ et concave sur $]0\,;+\infty[$

d. convexe sur $\mathbb{R}$

Question 34.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On désigne par F_1 et F_2 les primitives sur $\mathbb{R}$ de f telles que : $F_1(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $F_2(1) = 0$.
Sachant que $F_1(0) = 0$, on a $F_2(0) =$

a. $-\dfrac{\pi}{2}$ **b.** $-\dfrac{\pi}{4}$ **c.** 0 **d.** $\dfrac{\pi}{2}$

Question 35.
Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Sachant que f est une primitive de g et que la courbe représentative de f admet pour tangente au point d'abscisse 1 la droite d'équation $y = 2x - 3$, on peut affirmer que :

a. $g(1) = -3$ **b.** $g(1) = -1$ **c.** $g(1) = 2$ **d.** $g(1) = 5$

PROBABILITÉS

Question 36.

Soit X la variable aléatoire indiquant le numéro de la face obtenue après le jet d'un dé truqué.
La loi de X est donnée par le tableau suivant :

$X=k$	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,1	p	0,1	0,1	0,2	0,3

Que vaut l'espérance de X ?

a. 0,2 **b.** 3 **c.** 3,5 **d.** 4

Question 37.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$: $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n\,;\frac{1}{2}\right)$.
Sachant que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, nous avons $E(X^2) =$

a. $\frac{n^2}{2}$ **b.** $\frac{n^2}{4}$ **c.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **d.** $\frac{n(n+1)}{4}$

Question 38.

Soient $p \in]0\,;1[$ et n un entier naturel non nul. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Nous avons $P(X=n) =$

a. 1 **b.** $(1-p)^n$ **c.** p^n **d.** $1-p^n$

Question 39.

Soient n un entier naturel non nul, p un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$ et $q = 1-p$.
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois binomiales de paramètres (n,p) et (n,q) : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;q)$.
On note Z la variable aléatoire $X+Y$. On a alors :

a. $E(Z) = 2np$ et $V(Z) = 2npq$
b. $E(Z) = n$ et $V(Z) = n^2$
c. $E(Z) = V(Z) = 2npq$
d. $E(Z) = n$ et $V(Z) = 2npq$

Question 40.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{2}$.
Sachant que k est un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 4$ et $P(X=k) = \frac{3}{8}$, on peut affirmer que $\binom{4}{k} =$

a. 1 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 6

Question 41.

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que : $V(X) = 3$ et $V(Y) = 4$.
Sachant que $V(2X+2Y) = 14$, on peut affirmer que :

a. X et Y sont forcément indépendantes
b. X et Y sont forcément non indépendantes
c. X et Y sont forcément égales
d. les précédentes propositions sont fausses

Question 42.

Soient :

- **X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,25$;**
- **Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=0,5$;**
- **Z la variable aléatoire définie par $Z = 4X - Y$.**

L'espérance de la variable aléatoire Z est égale à :

a. 16 **b.** 46 **c.** 34 **d.** 4

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Attention ! Pour les questions restantes, on considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Avenir 2022

Variables
  n, k, S : entiers naturels
Traitement
  $S \leftarrow 0$
  $k \leftarrow 0$
  Saisir n
  Tant que $k < n$ **faire**
    $k \leftarrow k+1$
    $S \leftarrow S + k^3$
  Afficher $\dfrac{S}{n}$

Question 43.
Pour une valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ saisie par l'utilisateur, que permet de faire cet algorithme ?

a. Calculer la valeur de n^3
b. Calculer la moyenne des n premiers entiers
c. Calculer la somme des n premiers cubes
d. Calculer la moyenne des n premiers cubes

Question 44.
Pour une valeur de $n = 3$ saisie par l'utilisateur, que retourne cet algorithme ?

a. 3
b. $\dfrac{14}{3}$
c. 12
d. 36

Question 45.
Pour une valeur de $n \geqslant 2$ saisie par l'utilisateur, la valeur retournée par cet algorithme est :

a. forcément supérieure ou égale à n
b. forcément strictement inférieure à n
c. forcément égale à n
d. éventuellement égale à n

• • • FIN • • •